Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2024, Convocatoria extraordinaria

mentoor.es

Sèrie 3

Ejercicio 1. Análisis

Considere la función polinómica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

a) **Justifique que su gráfica corta el eje de las abscisas en un punto del intervalo [-2, 0]. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte.**

b) **Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de las abscisas? Justifique la respuesta.**

Solución:

a) **Justifique que su gráfica corta el eje de las abscisas en un punto del intervalo [-2, 0]. Dé un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte.**

Para justificar la existencia de un punto de corte (una raíz), aplicaremos el **Teorema de Bolzano** a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$.

1. **Continuidad:** La función $f(x)$ es un polinomio, por lo que es continua en todo el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, y en particular en el intervalo $[-2, 0]$.

2. **Signo en los extremos:** Evaluamos la función en los extremos del intervalo:

   - $f(-2) = 3(-2)^{13} + 5(-2)^3 + 2 = 3(-8192) + 5(-8) + 2 = -24576 - 40 + 2 = -24614 < 0.$
   - $f(0) = 3(0)^{13} + 5(0)^3 + 2 = 2 > 0.$

Dado que la función es continua y cambia de signo en los extremos del intervalo, el Teorema de Bolzano garantiza que existe al menos un punto $c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

Para encontrar un intervalo de longitud 0,5, evaluamos la función en el punto medio del intervalo, $x = -1$:

$$f(-1) = 3(-1)^{13} + 5(-1)^3 + 2 = -3 - 5 + 2 = -6 < 0.$$

Como $f(-1) < 0$ y $f(0) > 0$, la raíz debe encontrarse en el intervalo $(-1, 0)$. Este intervalo tiene una longitud de 1.

Evaluamos en el punto medio de $(-1, 0)$, que es $x = -0.5$:

$$f(-0.5) = 3(-0.5)^{13} + 5(-0.5)^3 + 2 = 3(-0.000122) + 5(-0.125) + 2 \approx -0.000366 - 0.625 + 2 > 0.$$

Como $f(-1) < 0$ y $f(-0.5) > 0$, la raíz se encuentra en el intervalo $(-1, -0.5)$.

$$\boxed{\textbf{La raíz se encuentra en el intervalo } (-1, -0.5), \textbf{ que tiene longitud 0,5.}}$$

b) **Estudie las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de las abscisas? Justifique la respuesta.**

Para estudiar la monotonía, calculamos la primera derivada de la función:

$$f'(x) = 3 \cdot 13x^{12} + 5 \cdot 3x^2 = 39x^{12} + 15x^2.$$

Podemos sacar factor común: $f'(x) = 3x^2(13x^{10} + 5)$.

Analizamos el signo de la derivada:
- El término $3x^2$ es siempre mayor o igual a cero ($3x^2 \geq 0$).
- El término $(13x^{10} + 5)$ es siempre estrictamente positivo, ya que $x^{10} \geq 0$.

El producto de un término no negativo y un término positivo, $f'(x)$, es siempre no negativo ($f'(x) \geq 0$) para todo $x \in \mathbb{R}$.
La derivada solo se anula en $x = 0$. Como la derivada no cambia de signo, la función es **estrictamente creciente** en todo $\mathbb{R}$ (excepto en $x = 0$, que es un punto de inflexión con tangente horizontal, pero no un extremo relativo).

Como la función es estrictamente creciente en todo su dominio, solo puede cortar el eje de las abscisas una vez. Si lo cortara más de una vez, tendría que "bajar" y "volver a subir", lo que implicaría la existencia de un mínimo, pero hemos demostrado que no tiene extremos relativos.

$$\boxed{\textbf{La función es estrictamente creciente en } \mathbb{R}.}$$

Ejercicio 2. Álgebra

Considere el sistema de ecuaciones siguiente, donde m es un parámetro real:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 3y + mz = -2} \\ \boldsymbol{x + my + 2z = 3} \\ \boldsymbol{x + y + 2z = m} \end{cases}$$

a) **Discuta el sistema según el valor del parámetro m.**
b) **Encuentre la solución del sistema para $\boldsymbol{m = 0}$.**
c) **Para $\boldsymbol{m = 2}$, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $\boldsymbol{x = 5y}$.**

Solución:

a) **Discuta el sistema según el valor del parámetro m.**

Aplicamos el Teorema de Rouché-Frobenius. La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= 1(2m-2) - (-3)(2-2) + m(1-m) \\ &= 2m - 2 + 0 + m - m^2 \\ &= -m^2 + 3m - 2 \end{aligned}$$

Igualamos el determinante a cero: $-m^2 + 3m - 2 = 0 \implies m^2 - 3m + 2 = 0$.

Las raíces son $m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$, que dan $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$.

Caso 1: $\boldsymbol{m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}}$ $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$. El sistema es **Compatible Determinado (S.C.D.)**.

Caso 2: $\boldsymbol{m = 1}$ $(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. La segunda y tercera ecuación son $x + y + 2z = 3$ y $x + y + 2z = 1$, lo que es una contradicción. $\text{Rg}(A) = 2, \text{Rg}(A^*) = 3$. El sistema es **Incompatible (S.I.)**.

Caso 3: $\boldsymbol{m = 2}$
$(A|A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$. $\text{Rg}(A) = 2$.

Restando F3 - F2: $(0, -1, 0 | -1)$. $\text{Rg}(A^*) = 2$. $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **Compatible Indeterminado (S.C.I.)**.

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Si } \boldsymbol{m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}} \implies \textbf{S.C.D.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{m = 1} \implies \textbf{S.I.} \\ \textbf{Si } \boldsymbol{m = 2} \implies \textbf{S.C.I.} \end{array}}$$

b) Encuentre la solución del sistema para $m = 0$.

Para $m = 0$, el sistema es S.C.D. El sistema es $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ x + 2z = 3 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$.

$|A| = -0^2 + 3(0) - 2 = -2$. Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4 - 0 - (-18)}{-2} = \frac{22}{-2} = -11.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{6 - 0 - (-4)}{-2} = \frac{10}{-2} = -5.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-9 - (-2) - (-3)}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

$$\boxed{\textbf{La solución es } \boldsymbol{x = -11, y = -5, z = 2}.}$$

c) Para $m = 2$, dé una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$.

Para $m = 2$ es S.C.I. El sistema es $\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$.

Restando la primera de la segunda: $5y = 5 \implies y = 1$.
Sustituyendo $y = 1$ en la primera: $x - 3 + 2z = -2 \implies x + 2z = 1$.
Hacemos $z = \lambda$, entonces $x = 1 - 2\lambda$. La solución general es $(1 - 2\lambda, 1, \lambda)$.

Ahora aplicamos la condición $x = 5y$:

$$1 - 2\lambda = 5(1) \implies 1 - 2\lambda = 5 \implies -4 = 2\lambda \implies \lambda = -2.$$

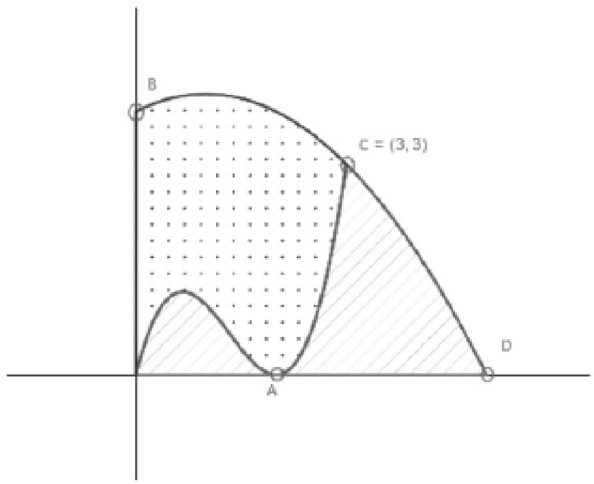
Sustituimos $\lambda = -2$ en la solución general: $x = 1 - 2(-2) = 5$, $y = 1$, $z = -2$.

$$\boxed{\textbf{La solución que cumple la condición es } \boldsymbol{(5, 1, -2)}.}$$

Ejercicio 3. Análisis

La clase de Elia ha diseñado el logotipo siguiente para pintarlo en la pared del instituto: La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$ con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B, $C = (3,3)$ y D es $y = g(x)$, con $g(x) = -(\frac{x-1}{2})^2 + 4$.

a) **Calcule las coordenadas de los puntos A, B y D.**
b) **Calcule el área de la zona punteada.**
c) **Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12}m^2$, ¿de qué color necesitarán más pintura?**



Solución:

a) **Calcule las coordenadas de los puntos A, B y D.**

- **Punto A:** Es un punto de corte de $f(x)$ con el eje OX ($y = 0$).
  $x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \implies x(x^2 - 4x + 4) = 0 \implies x(x-2)^2 = 0.$

  Las raíces son $x = 0$ y $x = 2$. Por la gráfica, **A=(2,0)**.
- **Punto B:** Es el punto de corte de $g(x)$ con el eje OY ($x = 0$).
  $g(0) = -(\frac{0-1}{2})^2 + 4 = -(-\frac{1}{2})^2 + 4 = -\frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4}$.

  Las coordenadas son **B=(0, 15/4)**.
- **Punto D:** Es un punto de corte de $g(x)$ con el eje OX ($y = 0$). $-(\frac{x-1}{2})^2 + 4 = 0 \implies (\frac{x-1}{2})^2 = 4 \implies \frac{x-1}{2} = \pm 2$. $x - 1 = 4 \implies x = 5$. O $x - 1 = -4 \implies x = -3$. Por la gráfica, **D=(5,0)**.

Las coordenadas son A=(2,0), B=(0, 15/4) y D=(5,0).

b) **Calcule el área de la zona punteada.**

El área punteada está comprendida entre las dos curvas desde $x = 0$ hasta $x = 3$ (abscisa del punto C).

La curva superior es $g(x)$ y la inferior es $f(x)$.

$$A_{punteada} = \int_0^3 (g(x) - f(x))dx.$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 2x + 1) + 4 = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + 4 = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{15}{4}$$

$$g(x) - f(x) = (-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{15}{4}) - (x^3 - 4x^2 + 4x) = -x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$$

$$A_{punteada} = \int_0^3 (-x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{15}{4})dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{15x^3}{12} - \frac{7x^2}{4} + \frac{15}{4}x\right]_0^3$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{4} - \frac{7x^2}{4} + \frac{15}{4}x\right]_0^3 = -\frac{81}{4} + \frac{5(27)}{4} - \frac{7(9)}{4} + \frac{45}{4} = \frac{-81 + 135 - 63 + 45}{4} = \frac{36}{4} = 9.$$

El área de la zona punteada es de 9 m².

c) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12}m^2$, ¿de qué color necesitarán más pintura?

Área azul (punteada) $= 9m^2$.

Área total $= \frac{175}{12} \approx 14.58m^2$.

Área roja (rayada) $=$ Área total - Área azul $= \frac{175}{12} - 9 = \frac{175-108}{12} = \frac{67}{12} \approx 5.58m^2$.

Comparando las áreas: $9m^2 > \frac{67}{12}m^2$.

Necesitarán más pintura de color azul.

Ejercicio 4. Probabilidad

Se estima que el 20% de los habitantes de una región padece algún tipo de arritmia. Para diagnosticarla, existe la posibilidad de colocar al paciente un monitor Holter, que detecta la arritmia en un 95% de los casos de personas que la padecen, pero que también da falsos positivos, por motivos eléctricos, en personas que no padecen arritmias en un 0,5% de los casos.

a) **Si escogemos 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias?**
b) **¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia?**
c) **Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias?**

Solución:

Definimos los sucesos:

A = "La persona padece arritmia".

$\bar{A}$ = "La persona no padece arritmia".

Pos = "El diagnóstico del Holter es positivo".

Neg = "El diagnóstico del Holter es negativo".

Datos del problema:

$P(A) = 0.20 \implies P(\bar{A}) = 0.80.$

$P(Pos|A) = 0.95 \implies P(Neg|A) = 1 - 0.95 = 0.05.$

$P(Pos|\bar{A}) = 0.005 \implies P(Neg|\bar{A}) = 1 - 0.005 = 0.995.$

a) **Si escogemos 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias?**

Es un experimento de Bernoulli. La probabilidad de que una persona padezca arritmia es $p = 0.20$ y de que no la padezca es $q = 0.80$.
La probabilidad de que "al menos una" padezca arritmias es el suceso complementario a "ninguna padece arritmias".

$$P(\text{ninguna padece arritmia}) = q^4 = (0.80)^4 = 0.4096.$$

$$P(\text{al menos una}) = 1 - P(\text{ninguna}) = 1 - 0.4096 = 0.5904.$$

La probabilidad es del 59,04%.

b) **¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia?**

Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total para calcular $P(Pos)$:

$$P(Pos) = P(Pos|A) \cdot P(A) + P(Pos|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(Pos) = (0.95 \cdot 0.20) + (0.005 \cdot 0.80) = 0.19 + 0.004 = 0.194.$$

La probabilidad de obtener un diagnóstico positivo es del 19,4%.

c) Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias?

Nos piden calcular $P(A|Neg)$. Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(A|Neg) = \frac{P(Neg|A) \cdot P(A)}{P(Neg)}.$$

Necesitamos $P(Neg) = 1 - P(Pos) = 1 - 0.194 = 0.806$.

$$P(A|Neg) = \frac{0.05 \cdot 0.20}{0.806} = \frac{0.01}{0.806} \approx 0.0124.$$

La probabilidad es de aproximadamente 1,24%.

Ejercicio 5. Análisis

Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ y $y > 0$, considere el rectángulo con vértices en los puntos (0, 0), (x, 0), (0, y) y (x, y).

a) **Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene área máxima es el de $x = \frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor de esta área?**

b) **Calcule la ecuación de la recta tangent a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de las abscisas.**

Solución:

a) **Compruebe que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene área máxima es el de $x = \frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor de esta área?**

El área del rectángulo es $A = \text{base} \cdot \text{altura} = x \cdot y$.

Como el punto (x, y) está en la curva, $y = e^{-2x}$. El área en función de x es:

$$A(x) = x \cdot e^{-2x}.$$

Para encontrar el máximo, derivamos la función área e igualamos a cero:

$$A'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = e^{-2x}(1 - 2x).$$

Igualamos a cero: $e^{-2x}(1 - 2x) = 0$. Como e^{-2x} nunca es cero, la única solución es:

$$1 - 2x = 0 \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Queda comprobado que el área es máxima para $x = 1/2$.

Para confirmar que es un máximo, usamos la segunda derivada:
$A''(x) = -2e^{-2x}(1 - 2x) + e^{-2x}(-2) = e^{-2x}(-2 + 4x - 2) = e^{-2x}(4x - 4)$.
$A''(1/2) = e^{-1}(2 - 4) < 0$, por lo que es un máximo.

El valor del área máxima es:

$$A(1/2) = \frac{1}{2}e^{-2(1/2)} = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

$$\boxed{\textbf{Queda comprobado que el máximo está en } x = 1/2\textbf{. El área máxima es } \frac{1}{2e} \ \mathbf{u^2}.}$$

b) **Calcule la ecuación de la recta tangent a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de las abscisas.**

Sea $f(x) = e^{-2x}$. La ecuación de la tangente es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

- $f(0) = e^0 = 1$. El punto de tangencia es $(0, 1)$.
- $f'(x) = -2e^{-2x}$.
- $f'(0) = -2e^0 = -2$. La pendiente es -2.

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = -2(x - 0) \implies y = -2x + 1$.

Para encontrar el punto de corte con el eje de las abscisas (eje OX), hacemos $y = 0$:

$$0 = -2x + 1 \implies 2x = 1 \implies x = 1/2.$$

El punto de corte es $(1/2, 0)$.

$$\boxed{\textbf{Recta tangente: } \boldsymbol{y = -2x + 1}. \textbf{ Punto de corte con OX: } \boldsymbol{(1/2, 0)}.}$$

Ejercicio 6. Geometría

Considere el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 2z = -7$.

a) **Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P. Calcule el punto de intersección de π con r.**
b) **Calcule la distancia d del punto P al plano π.**
c) **Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P.**

Solución:

a) **Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P. Calcule el punto de intersección de π con r.**

El vector director de la recta r es el vector normal del plano π, $\vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (1, 2, -2)$.
La recta r pasa por $P(1, 3, 0)$. Su ecuación paramétrica es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

Para encontrar el punto de intersección Q, sustituimos r en la ecuación de π:

$$(1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) = -7$$

$$1 + \lambda + 6 + 4\lambda + 4\lambda = -7$$

$$9\lambda + 7 = -7 \implies 9\lambda = -14 \implies \lambda = -14/9.$$

El punto de intersección es:

$$Q = (1 - 14/9, 3 - 28/9, -2(-14/9)) = (-5/9, -1/9, 28/9).$$

$$\boxed{\textbf{El punto de intersección es } \boldsymbol{Q(-5/9, -1/9, 28/9)}.}$$

b) **Calcule la distancia d del punto P al plano π.**

La distancia d es la distancia entre el punto P y su proyección ortogonal Q sobre el plano.
$d(P, \pi) = d(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{(-5/9 - 1)^2 + (-1/9 - 3)^2 + (28/9 - 0)^2}$

$$= \sqrt{(-14/9)^2 + (-28/9)^2 + (28/9)^2} = \sqrt{\frac{196 + 784 + 784}{81}} = \sqrt{\frac{1764}{81}} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}.$$

Alternativamente, usando la fórmula de la distancia punto-plano para $P(1, 3, 0)$ y $\pi : x+2y-2z+7 = 0$:

$$d = \frac{|1(1) + 2(3) - 2(0) + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 + 6 + 7|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{14}{\sqrt{9}} = \frac{14}{3}.$$

$$\boxed{\textbf{La distancia es } \boldsymbol{d = 14/3} \textbf{ unidades.}}$$

c) Calcule la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P.

Un plano paralelo π' tiene la misma ecuación normal, $x + 2y - 2z + D' = 0$.
El punto P está a la misma distancia de π y de π'. Esto significa que el punto simétrico de Q respecto de P, llamémoslo P_{sim}, debe pertenecer a π'.

$$P_{sim} = 2P - Q = 2(1,3,0) - (-5/9, -1/9, 28/9) = (2 + 5/9, 6 + 1/9, 0 - 28/9) = (23/9, 55/9, -28/9).$$

Sustituimos este punto en la ecuación de π' para hallar D':

$$(23/9)+2(55/9)-2(-28/9)+D' = 0 \implies \frac{23 + 110 + 56}{9}+D' = 0 \implies \frac{189}{9}+D' = 0 \implies 21+D' = 0 \implies D' = -21.$$

$$\boxed{\textbf{La ecuación del otro plano es } \boldsymbol{x + 2y - 2z - 21 = 0}.}$$